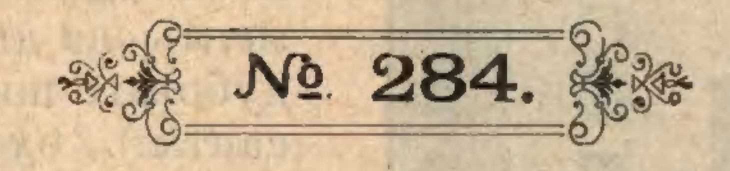
XXIV Сем. № 8.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.



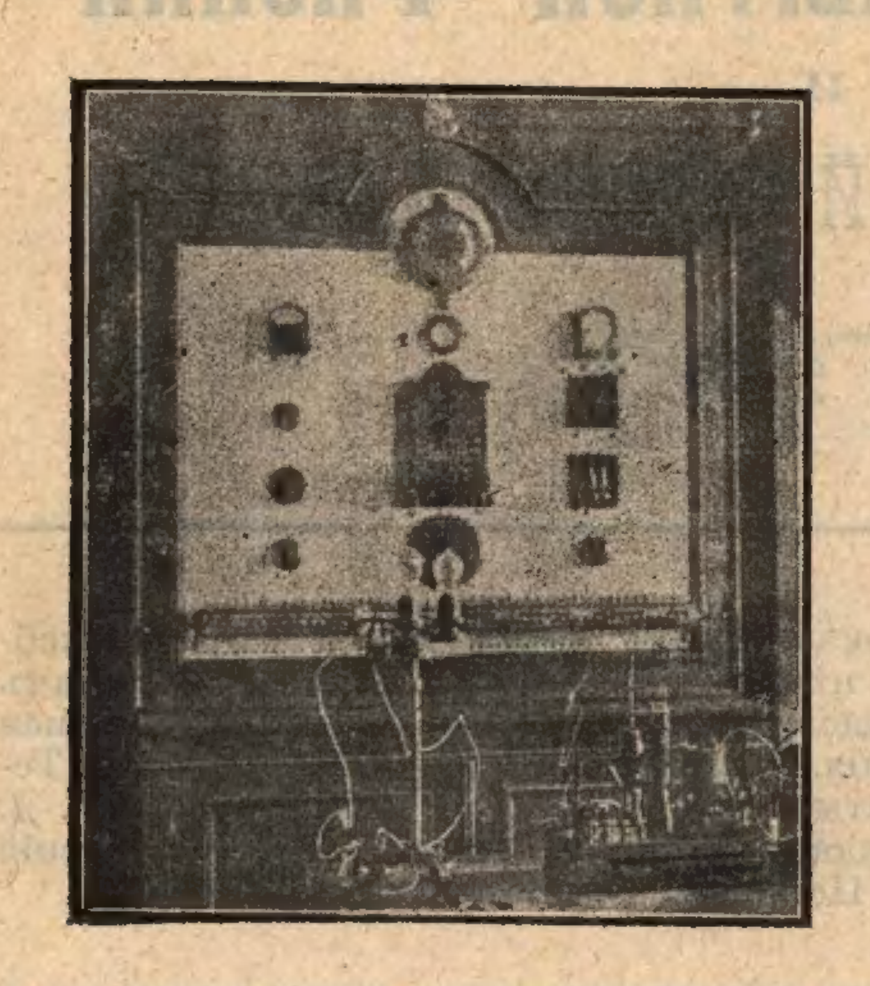
Аккумуляторы въ физическихъ кабинетахъ среднихъ учебныхъ заведеній.

А. Вольфензона въ Лодзи.

Физическій кабинетъ безъ газа и электричества—собраніе приборовъ, но не лабораторія.

Предметомъ первой необходимости во всякомъ физическомъ кабинетѣ является надежный и удобный для пользованія источникъ электрической энергіи. Аккумуляторы, дающіе токъ на всякое требованіе и притомъ токъ постоянной силы, легко регулируемой въ широкихъ предѣлахъ, вытѣсняютъ, какъ видно изъ иностранныхъ періодическихъ изданій за послѣднее время, гальваническія батареи и во многихъ физическихъ учрежденіяхъ работаютъ даже наряду съ токомъ отъ центральной станціи. У насъ, покамѣстъ, лишь немногія среднія учебныя заведенія послѣдовали примѣру запада. Полагаю поэтому, что гг. сопреподавателямъ будетъ небезынтересно познакомиться съ нѣкоторыми опытными данными, касающимися постановки и заряженія аккумуляторовъ, для чего постараюсь возможно точно описать устройство батареи въ Лодзинской мужской гимназіи (поставлена 2 года

тому назадъ—фирмой Сименсъ-Гальске, всѣ сюда относящіеся приборы выписаны отъ Сименсъ-Гальске, Берлинъ, или отъ фирмы Максъ Коль, Хемницъ).



Батарея составлена изъ 24 аккумуляторовъ, емкостью до 720 амперъ-часовъ, 1,5 киловаттъ-часовъ и раздѣлена на двѣ малыя по 12 элементовъ въ каждой. Помѣщаются элементы на двухъ полкахъ внизу дубоваго шкафа, (165×100×27 сантм.) одни надъ другими, такимъ образомъ, что на каждой полкѣ стоитъ по 6-ти элементовъ каждой батареи. На шкафу укрѣплена въ дубовой рамѣ (165×134 сантм.) мраморная распредѣлительная доска, въ которой ввинчены слѣдующіе приборы: (Перечень въ порядкѣ сверху внизъ отъ лѣваго угла. См. прилагаемый фотографическій снимокъ и схему).

Въ первомъ ряду: 1) вольтметръ для измѣренія электродвижущей силы каждой пары элементовъ; 2) выключатель для разъединенія батареи съ заряжающимъ токомъ—на время дѣйствія ея; 3) коммутаторъ для соединенія двухъ малыхъ батарей въ одну: параллельно или послѣдовательно; 4) прерыватель тока въ главной линіи для лѣвой батареи.

Во второмъ ряду: 5) Весьма точный амперметръ 0—10 амперъ; 6) указатель заряжающаго и разряжающаго тока; 7) регуляторъ

тока: никкелевый, съ колѣнчатой рукояткой, реостатъ 0—15 омовъ; 8) коммутаторъ къ вольтметру № 1, для повѣрки заряженія каждой изъ 12 паръ.

Въ третьемъ ряду: 9) вольтметръ 0 — 60*v* для измѣренія электродвижущей силы, а равно и разности потенціаловъ у зажимовъ малыхъ и большой батарей; 10) коммутаторъ для измѣненія направленія тока въ главной линіи; 11) коммутаторъ для вольтметра № 9 и 12) прерыватель тока правой батареи.

Наконецъ, вдоль всего нижняго края распредѣлительной доски 13(и 14) два пахитропа, для каждой батареи особый, при вращеніи дающіе комбинаціи: 1 группа изъ 12-ти элементовъ, 2—6; 4—3; 6—2; 12—1; а при соединеніи обѣихъ батарей коммутаторомъ № 3 еще комбинаціи: 1—24; 2—12; 4—6; 8—3; 6—4; 12—2; 24—1, итого 2 (bis), 4 (bis), 8 (bis), 16, 12 (bis), 24 (bis), 48 вольтъ, причемъ большинство комбинацій повторяется при двойномъ числѣ элементовъ въ группѣ. Такимъ образомъ раздѣленіе батареи на двѣ малыя значительно увеличиваетъ число комбинацій; кромѣ того даетъ возможность, пользуясь одной, одновременно заряжать другую половину аккумуляторовъ. Зажимы элементовъ соединены толстыми (2 мм. въ діаметрѣ) мѣдными проволоками съ зажимами пахитроповъ; отъ крайнихъ зажимовъ на пахитропахъ идутъ по жолобкамъ, выдолбленнымъ въ полу, изолированные проводы къ зажимамъ въ разныхъ концахъ экспериментальнаго стола; послѣдніе соединены между собой мѣдными полосками, проложенными по краямъ стола. Отъ тѣхъ же зажимовъ на пахитропахъ проведены по стѣнѣ толстыя мѣдныя проволоки къ термобатареѣ Гюльхера и отъ главной линіи сдѣлано отвѣтвленіе для лампочки накаливанія, (40 вольтъ— 25 свѣчей), установленной въ футлярѣ со щелью передъ отражательнымъ гальванометромъ и для другихъ лампочекъ, освѣщающихъ кабинетъ.

При такомъ устройствѣ батареи, пользуясь электричествомъ такъ-же удобно, какъ газомъ, преподаватель имѣетъ возможность на глазахъ у учениковъ, скоро и просто произвести важнѣйшія электрическія измѣренія, повѣрить основные законы, сдѣлать многое, передъ чѣмъ, въ иныхъ условіяхъ, отступилъ-бы поневолѣ.

Считаю необходимымъ указать на измѣненія въ порядкѣ изложенія курса, вызываемыя введеніемъ въ преподаваніе аккумуляторовъ и измѣрительныхъ техническихъ приборовъ. Непосредственно послѣ ознакомленія съ простѣйшими элементами, слѣдуетъ перейти къ химическимъ дѣйствіямъ тока, поляризаціи и вторичнымъ элементамъ. Аккумуляторъ долженъ быть на урокѣ заряженъ токомъ отъ элементовъ, при разряженіи же слѣдуетъ обратить вниманіе учениковъ на полное тожество дѣйствій тока отъ обоихъ источниковъ, такъ какъ у начинающихъ нѣтъ увѣренности въ единствѣ электричества. Одновременно съ дѣйствіемъ на магнитную стрѣлку, слѣдуетъ показать также и дѣйствіе тока на мягкое желѣзо; тогда устройство амперметра не потребуетъ

особыхъ разъясненій, въ виду знакомства учениковъ съ однородными приборами: металлическими барометрами, манометрами *etc*. Если затѣмъ, при калиброваніи тангенсъ-гальванометра вольтаметромъ съ гремучимъ газомъ, повѣрить результаты съ показаніями точнаго амперметра, то послѣдній можетъ замѣщать гальванометръ въ такихъ, напр., измѣреніяхъ, какъ повѣрка закона Ома и опредѣленіе внутренняго сопротивленія и электродвижущей силы батареи вычисленіемъ на основаніи указаннаго закона. При повѣркѣ перваго закона Кирхгофа амперметръ остается въ главной цѣпи, а въ отвѣтвленія отъ зажимовъ вводятся въ одно тангенсъ-гальванометръ, въ другое же вольтметръ.

Что же касается вольтметра, теорія котораго, какъ помѣщаемаго въ отвѣтвленіи, не можетъ быть изложена начинающимъ, то не педагогично было бы пользоваться его указаніями ранѣе усвоенія учащимися законовъ Кирхгофа и хотя бы приблизительнаго ихъ оправданія (напр., приборомъ Фостера).

Въ дальнѣйшемъ курсѣ, вводя между зажимами различныя сопротивленія изъ магазина, а вольтметръ въ отвѣтвленіе, одними отчетами на вольтъ—и амперметрѣ повѣряется основная формула тока: „постоянное значеніе паденія потенціала на единицу сопротивленія есть сила тока“ и запечатлѣвается въ сознаніи учащихся теорема: „разность потенціаловъ у зажимовъ замкнутой батареи относится къ дѣйствующей въ цѣпи электродвижущей силѣ, какъ внѣшнее сопротивленіе къ полному сопротивленію всей цѣпи“. Упомянутыя же истины вмѣстѣ съ законами Кирхгофа даютъ учащимся ключъ къ пониманію различія типовъ динамомашины, и къ уясненію вопроса о передачѣ и распредѣленіи электрической энергіи.

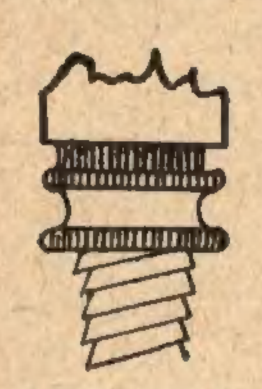
Также и при другихъ опытахъ изъ области, напр., тепловыхъ и магнитныхъ дѣйствій тока, хотя бы и не имѣющихъ цѣлью точныхъ измѣреній, постоянство тока батареи и легкость отчетовъ по амперъ—и вольтметру облегчаютъ учителю изложеніе, учащимся пониманіе явленія.

Незамѣнимыя услуги приноситъ также батарея преподаванію, питая дуговую лампу въ скіоптикопѣ, лампочки накаливанія, а также электромоторъ, приводящій въ движеніе различные механическіе и акустическіе приборы.

Главное условіе исправной и продолжительной службы аккумуляторовъ—заряженіе ихъ на мѣстѣ. Если это условіе выполнено, аккумуляторы почти не требуютъ ухода. Скоро и успѣшно производится заряженіе динамо-машиной, но не столько динамо, какъ газовый къ ней двигатель по цѣнѣ почти недоступны кабинетамъ ср. уч. заведеній (по смѣтѣ, составленной фирмой Сименсъ-Гальске, динамо, шунтовая, $60v - 9A$ съ газовымъ двигателемъ въ 1 лош. силу,—съ полной установкой на мѣстѣ 950 р.).

Въ кабинетѣ Лодзинской гимназіи заряженіе производится термо-батареей Гюльхера, по цѣнѣ недорогой (210 марокъ, Коль—Хемницъ); но токъ отъ нея такъ слабъ, что успѣшнаго

заряженія мнѣ удалось ею достигнуть только съ принятіемъ особыхъ предосторожностей. Причина неуспѣха первыхъ попытокъ зависѣла отъ мѣдныхъ зажимовъ, которыми совершенно напрасно фабрики снабжаютъ аккумуляторы. Испаренія сѣрной кислоты давали съ мѣдью окислы, которые, проникая, при малѣйшемъ ослабленіи, между зажимами и проволокой, до такой степени портили контакты, что каждый элементъ въ отдѣльности представлялъ значительное, а всѣ вмѣстѣ и непреодолимое сопротивленіе для слабаго тока термо-батареи. Послѣ очистки заряженіе шло лучше, но при частомъ вывинчиваніи аккумуляторовъ клещами, электроды отрывались отъ пластинъ. Оказалось необходимымъ измѣнить и электроды и зажимы: въ настоящее время электродамъ дана форма винта, зажимъ же представляетъ гайку. (См. прилаг. рисунокъ).



Какъ электроды, такъ и гайка приготовлены изъ сплава: свинецъ 94, висмутъ 2, сурьма 4, на который, какъ показали пробы, слабѣе всѣхъ дѣйствуетъ сѣрная кислота. Проволоку изъ указаннаго сплава до сихъ поръ мнѣ не удалось получить, тѣмъ не менѣе за 8 мѣсяцевъ зажимы ни разу не очищались, окисленія нѣтъ и заряженіе идетъ правильно.

Привожу числовыя данныя, полученныя мною при измѣреніяхъ во время заряженія; насколько мнѣ извѣстно, заряженіе батареи изъ 24-хъ аккумуляторовъ одной термо-батареи Гюльхера до сихъ поръ считалось неосуществимымъ.

Термо-батарея, которою производится заряженіе, служила 3 года; электродвижущая ея сила 3,9 вольтъ, внутреннее сопротивленіе 0,61 ома, отапливается газомъ, причемъ расходъ составляетъ до 30 коп. за полныя сутки горѣнія; не требуетъ особаго регулятора давленія газа, но къ вечеру слѣдуетъ уменьшать пламя, прикручивая кранъ въ газоотводѣ; выдерживаетъ почти непрерывное нагрѣваніе въ теченіе недѣль. Произведенныя измѣренія должны были рѣшить два вопроса: 1) въ какой срокъ незаряженные или вполнѣ истощенные аккумуляторы могутъ быть заряжены до конца; 2) можетъ ли термо-батарея пополнять весь возможный въ теченіе года расходъ электричества. Съ какою цѣлью было произведено достаточно точное измѣреніе количества энергіи, накопляющейся въ аккумуляторахъ за сутки заряженія.

Обозначая черезъ E разность потенціаловъ на проводникахъ, идущихъ отъ термо-батареи, у зажимовъ батареи аккумуляторовъ, а черезъ e обратную электродвижущую силу, развиваемую заряженіемъ, черезъ r полное сопротивленіе батареи изъ 24-хъ элементовъ, соединенныхъ пахитропами и коммутаторомъ № 3 параллельно, вмѣстѣ съ сопротивленіемъ всѣхъ проводниковъ отъ аккумуляторовъ къ пахитропамъ, имѣемъ для силы заряжающаго тока выраженіе $i = \frac{E - e}{r}$. Такъ какъ во время заряженія всѣ эти

величины мѣняются, то количество затраченной во время t энергіи выражается, какъ извѣстно, $\int_0^t Eidt$; потеря на нагрѣваніе за то же время по закону Джоуля-Ленца выразится $\int_0^t i^2rdt$; количество же запасенной энергіи:

$$\int_0^t Eidt - \int_0^t i^2rdt = \int_0^t eidt.$$

Такъ какъ мы не имѣемъ возможности выразить входящія сюда величины аналитически въ функціи отъ t, то для вычисленія интеграла слѣдуетъ измѣрить площадь, ограниченную на діаграммѣ соотвѣтствующей кривой и прямыми линіями. За абсциссы кривой приняты времена, за ординаты соотвѣтствующія произведенія ei. Измѣренія e и i производились трижды: 1-ый разъ, начиная отъ $e = 1{,}95\,v$ въ теченіе 9 часовъ, черезъ часъ; вторично отъ $e = 2{,}1\,v$ въ теченіе 4-хъ и, наконецъ, при $e = 2{,}2v$ также въ теченіе 4-хъ часовъ. Вычисленія дали среднее количество запасенной энергіи за сутки заряженія = 53,2 ваттъ-часамъ. Итого полное заряженіе батареи требуетъ около 4-хъ недѣль постояннаго дѣйствія термо-батареи. Практичнѣе и скорѣе заряжаются свѣжеполученные аккумуляторы токомъ отъ динамо-машины, (которыя въ послѣднее время проникли даже и въ захолустные города) или даже токомъ отъ элементовъ Бунзена. Гораздо существеннѣе вопросъ, можетъ-ли термо-батарея пополнять весь возможный за учебный годъ расходъ электричества. Разсчеты даютъ вполнѣ удовлетворительные результаты. Въ самомъ дѣлѣ, большинство классныхъ опытовъ не требуетъ ни значительной разности потенціаловъ, ни большой силы тока. Нетрудно, помощью пахитроповъ, для каждаго опыта подобрать соотвѣтствующую комбинацію элементовъ, съ такимъ разсчетомъ, чтобы какъ разность потенціаловъ, такъ и сила тока были лишь достаточны и чтобы каждый разъ вводилось какъ можно меньше сопротивленія изъ реостата. Тогда, полагая на большинство опытовъ не болѣе $4v$, 2—3A, около 10 ваттъ, при 2—3 часовомъ разрядѣ батареи въ недѣлю, расходъ электричества съ избыткомъ пополняется при заряженіи (обычномъ) 1 сутки въ недѣлю. Значительная трата тока необходима только для катушки Румкорфа и для дуговой лампы. Катушка въ кабинетѣ гимназіи (длина искры 20 см.) хорошо работаетъ при $12v$, 5 — 6A, итого требуетъ для 2 часовъ дѣйствія 132 ваттъ-час. Значитъ пополненіе термо-батареей убыли электричества $\frac{132 \cdot 4}{3} = 176$ в.—ч. (считая отдачу энергіи до 75%) производится въ $3^1/_2$ сутки. Только во время производства оптическихъ опытовъ, требующихъ свѣта дуговой лампы, заряженіе должно произ-

водиться почти непрерывно. При этомъ условіи горѣніе лампы (48v, 3—4A) можетъ быть доведено до 2-хъ часовъ въ недѣлю. Опытъ за истекшій годъ вполнѣ оправдалъ разсчеты: несмотря на большую трату тока для рентгенографіи и при свободномъ пользованіи свѣтомъ дуговой лампы, батарея ни разу не отказывала служить. Такимъ образомъ, термо-батарея Гюльхера, не требуя ухода, является незамѣнимымъ по удобству источникомъ пополненія расхода батареи.

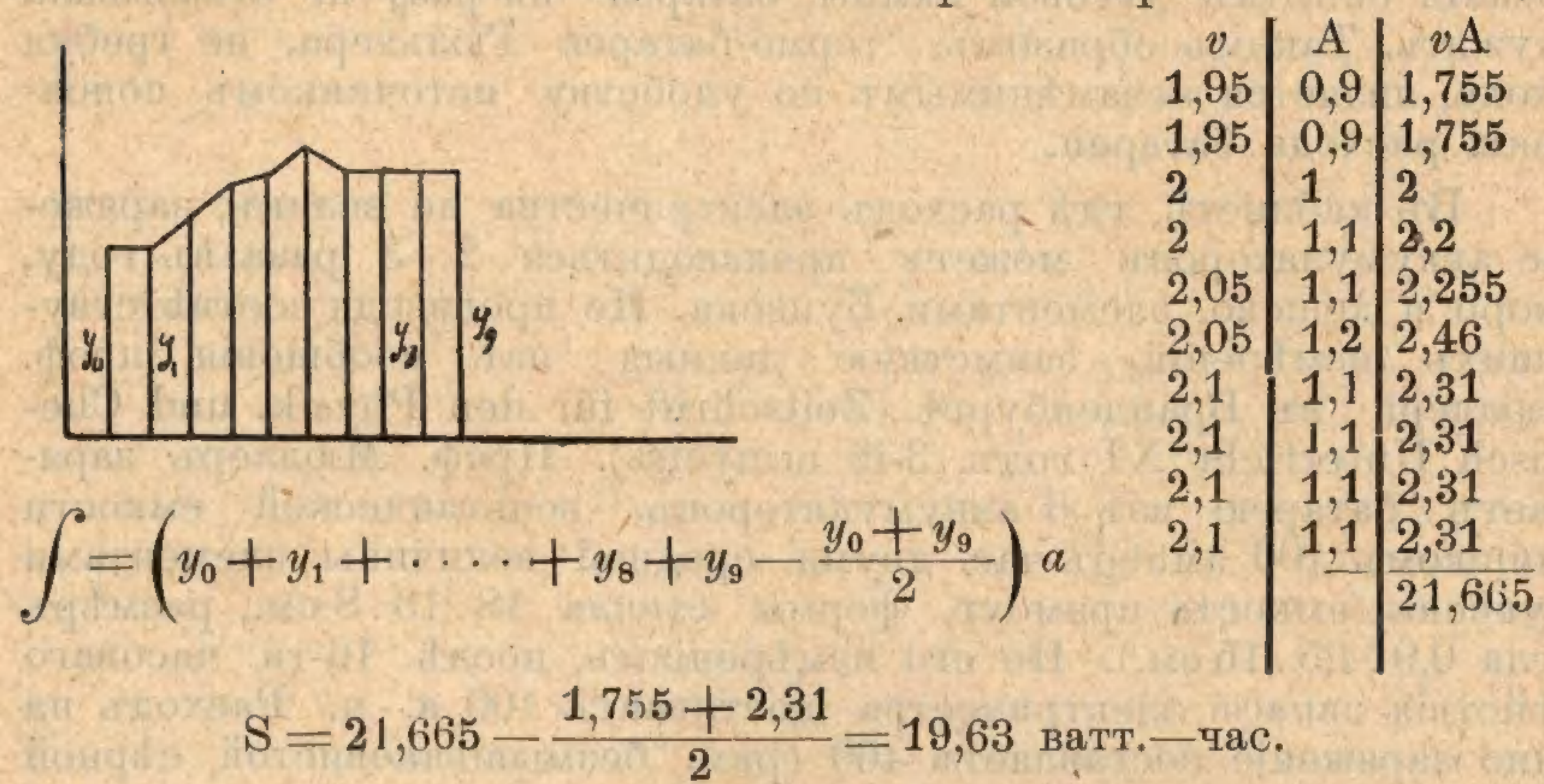
Въ кабинетѣ, гдѣ расходъ электричества не великъ, заряженіе аккумуляторовъ можетъ производиться 2—3 раза въ году, скоро и дешево, элементами Бунзена. Не производя соотвѣтствующихъ измѣреній, заимствую данныя изъ сообщенія проф. Мюллера въ Бранденбургѣ (Zeitschrift für den Physik. und Chemisch Unterricht XI годъ, 3-ій выпускъ). Проф. Мюллеръ заряжаетъ батарею изъ 6 аккумуляторовъ, вольтаической емкости слишкомъ 100 амперъ-час. двумя средней величины элементами Бунзена (емкость прямоуг. формы стекла 18.13.8 см., размѣръ угля 0,9.4,5.15 см.). По его измѣреніямъ, послѣ 16-ти часоваго дѣйствія запасъ электричества достигаетъ 100 а.-ч. Расходъ на одно заряженіе составляетъ 460 грам. безмышьяковистой сѣрной кислоты, 500 гр. неочищенной азотной и 340 гр. цинка и не превышаетъ 1,50 марки. Сравненіе со стоимостью газа даетъ отношеніе 1 марка за 1 рубль.

Батарея, гдѣ 6 аккумуляторовъ, въ общемъ вполнѣ достаточная для кабинета ср. уч. завед., недостаточна однако для дуговой лампы. Весьма дешевую (всего 200 марокъ), удовлетворительную и для послѣдней цѣли батарею описываетъ К. Маассъ-Кюстринъ (Z. f. d. Phys. u. Ch. Unterricht. г. XI, 5-ый выпускъ). Батарея состоитъ изъ 8 аккумул. (типа D—берлинской фабрики Безе), емкостью по 18 а.-ч., заряжаемыхъ термо-бат. Гюльхера и заряжающихъ въ свою очередь другіе 12 элемент. (типа X, очень мал. емкость 4 а.-ч.). Послѣдняя батарея присоединяется пахитропомъ на батареѣ большой емкости только для питанія дуговой лампы. Лампа, конструкціи Кертинга (40v, — 2—$2^1/_2$A) можетъ горѣть отъ дѣйствія батареи въ продолженіе часа. По свидѣтельству автора сообщенія, малая батарея несмотря на полное каждый разъ истощеніе, послѣ $2^1/_2$ лѣтъ дѣйствія въ хорошемъ состояніи.

Въ заключеніе считаю нелишнимъ указать на возможность ускоренія заряженія батареи большей емкости, если заряженіе производить двумя термо-батареями Гюльхера. Термо-батареи слѣдуетъ соединять послѣдовательно, а не параллельно, какъ предполагается, (см. проспектъ Коля и др.) такъ какъ теоретически ничтожное сопротивленіе большаго числа параллельно соединенныхъ аккумуляторовъ на практикѣ значительно и, какъ показываютъ вышеприведенные разсчеты, приблизительно равно внутреннему сопротивленію двухъ послѣдовательно соединенныхъ батарей.

Таблица произведенныхъ измѣреній.

I-ое измѣреніе въ продолженіи 9 часовъ—черезъ часъ. 1-ый отчетъ сейчасъ послѣ соединенія съ термо-батареей.



v	A	vA
1,95	0,9	1,755
1,95	0,9	1,755
2	1	2
2	1,1	2,2
2,05	1,1	2,255
2,05	1,2	2,46
2,1	1,1	2,31
2,1	1,1	2,31
2,1	1,1	2,31
2,1	1,1	2,31
		21,665

$$\int = \left(y_0 + y_1 + \cdots + y_8 + y_9 - \frac{y_0 + y_9}{2}\right) a$$

$$S = 21,665 - \frac{1,755 + 2,31}{2} = 19,63 \text{ ватт.—час.}$$

II-ое измѣреніе производилось въ продолженіи 4-хъ часовъ —черезъ часъ, спустя сутки непрерывнаго заряженія.

$$S = 2,31 \cdot 4 = 9,24 \text{ в.—ч.}$$

v	A	vA
2,1	1,1	2,31
2,1	1,1	2,31
2,1	1,1	2,31
2,1	1,1	2,31
2,1	1,1	2,31

III-ье измѣреніе спустя еще 2 сутокъ непрерывнаго заряженія.

$$S = 2,2 \cdot 4 = 8,8 \text{ в.—ч.}$$

v	A	vA
2,2	1	2,2
2,2	1	2,2
2,2	1	2,2
2,2	1	2,2
2,2	1	2,2

$$\begin{array}{r} 19,63 \\ 9,24 \\ 8,8 \\ \hline 37,67 \end{array} \qquad \frac{37,67 \cdot 24}{17} = 53,2 \text{ ват.—час. въ сутки.}$$

О нѣкоторыхъ методахъ рѣшенія задачъ тригонометріи на плоскости.

С. Шатуновскаго въ Одессѣ.

*(Продолженіе *).*

§ 6. Въ тригонометрическихъ задачахъ геометрическаго происхожденія, то есть въ тригонометрическихъ задачахъ, къ которымъ приходятъ при различныхъ изслѣдованіяхъ чисто геометрическаго характера, данныя и искомыя функціи отъ линейныхъ элементовъ треугольника всегда бываютъ однородными относительно этихъ элементовъ. Къ рѣшенію этихъ задачъ и можетъ быть всегда примѣнима теорема, доказанная въ § 4. Мы ограничимся здѣсь только задачами этого рода и въ послѣдующемъ будемъ предполагать разъ навсегда, что входящія въ разсмотрѣніе функціи отъ линейныхъ элементовъ треугольника суть функціи однородныя относительно этихъ элементовъ.

Тригонометрическія задачи, относящіяся до рѣшенія треугольниковъ, принадлежатъ или всегда приводимы къ рѣшенію задачи одного изъ слѣдующихъ трехъ типовъ или группъ. Мы разсмотримъ нѣсколько случаевъ, которые здѣсь могутъ представиться.

§ 7. *Первая группа задачъ.* Даны *два* угла треугольника A и B и величина однородной функціи k его линейныхъ элементовъ. Ищется величина другой однородной функціи k_1 линейныхъ элементовъ треугольника.

Въ этомъ случаѣ извѣстны всѣ три угла A, B и $C = 180^0 - (A + B)$. Пусть m и m_1 будутъ измѣренія функцій k и k_1. Приведя числа m и m_1 къ одному знаменателю и обозначивъ черезъ d общаго наибольшаго дѣлителя числителей, получимъ $m = \frac{pd}{n}$, $m_1 = \frac{p_1 d}{n}$. Каждая изъ функцій k^{p_1} и k_1^p будетъ измѣренія $\frac{pp_1 d}{n}$, а потому $\frac{k_1^p}{k^{p_1}}$ будетъ однородная дробь нулевого измѣренія относительно линейныхъ элементовъ треугольника. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{k_1^p}{k^{p_1}} = f$$

гдѣ f, по теоремѣ § 4, есть функція отъ однихъ только угловъ

---

*) См. № 283 „Вѣстника".

треугольника. Изъ этого равенства находимъ

$$k_1 = \sqrt[p]{fk^{p_1}}.$$

Примѣръ. Даны A, B и Δ. Опредѣлить величину произведенія $h_a h_b l_c$. Такъ какъ Δ второго, а $h_a h_b l_c$ третьяго измѣренія, то $p = 2$, $p_1 = 3$. По предыдущему имѣемъ:

$$\frac{(h_a h_b l_c)^2}{\Delta^3} = \frac{8(h_a h_b h_c)^2}{(ah_a)^3} = \frac{8h_b^2 h_c^2}{a^3 h_a},$$

а такъ какъ

$$h_a = b\sin C,\ h_b = a\sin C,\ l_c = \frac{h_c}{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} = \frac{a\sin B}{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)},$$

то

$$\frac{(h_a h_b l_c)^2}{\Delta^3} = \frac{8a\sin^2 B\sin C}{b\cos^2\frac{A-B}{2}} = \frac{8\sin A\sin B\sin C}{\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)},$$

поэтому

$$h_a h_b l_c = \frac{2\Delta}{\cos\frac{A-B}{2}}\sqrt{2\Delta\sin A\sin B\sin C}.$$

§ 8. *Вторая группа задачъ.* Данъ *одинъ* уголъ A треугольника и величины двухъ однородныхъ функцій k_1 и k_2 его линейныхъ элементовъ. Ищутся величины угловъ B и C.

Мы будемъ предполагать, что функціи k_1 и k_2 одного измѣренія, ибо въ противномъ случаѣ мы возведеніемъ въ прилично выбранныя степени можемъ замѣнить k_1 и k_2 функціями одного измѣренія, какъ это показано было въ предыдущемъ параграфѣ. Для опредѣленія угловъ B и C имѣемъ два уравненія

$$B + C = 180^0 - A;\ f = \frac{k_1}{k_2},$$

гдѣ f есть функція отъ однихъ только угловъ A, B, C. Легко видѣть, что въ задачѣ слишкомъ много данныхъ: нѣтъ надобности знать въ отдѣльности величину каждой изъ функцій k_1 и k_2 — достаточно знать величину q ихъ отношенія. Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ величина двухъ угловъ A и B опредѣляется ихъ суммой B + C и величиной q однородной функціи $\frac{k_1}{k_2}$ нулевого измѣренія относительно линейныхъ элементовъ треугольника. Рѣшеніями задачи будутъ тѣ значенія B и C, которыя удовлетворяютъ совокупнымъ уравненіямъ

$$B + C = 180^0 - A$$

$$f = \frac{k_1}{k_2}.$$

Послѣднее уравненіе получено изъ разсмотрѣнія дроби $\frac{k_1}{k_2}$; но вмѣсто нея можно взять другую дробь нулевого измѣренія относительно линейныхъ элементовъ треугольника. Эта послѣдняя должна быть составлена изъ данныхъ величинъ k_1 и k_2, то есть она должна быть функціей $\varphi(k_1, k_2)$ отъ k_1 и k_2. А такъ какъ k_1 и k_2 одного измѣренія относительно линейныхъ элементовъ треугольника, то функція $\varphi(k_1 k_2)$ только тогда будетъ нулевого измѣренія относительно линейныхъ элементовъ треугольника, когда она будетъ однородною функціей нулевого измѣренія относительно k_1 и k_2. *) По свойству однородной функціи нулевого измѣренія имѣемъ тождественно для всякаго произвольнаго числа t

$$\varphi(k_1, k_2) = \varphi(tk_1, tk_2).$$

Полагая $t = \frac{1}{k_1}$, получимъ тождественно

$$\varphi(k_1, k_2) = \varphi\left(\frac{k_1}{k_2}, 1\right),$$

то есть φ есть функція отъ отношенія $\frac{k_1}{k_2}$. Мы можемъ вмѣсто $\varphi(k_1, k_2)$ писать $\varphi\left(\frac{k_1}{k_2}\right)$. Уравненіе, соотвѣтствующее разсмотрѣнію функціи $\varphi(k_1, k_2)$, будетъ

$$\varphi\left(\frac{k_1}{k_2}\right) = \varphi(f),$$

ибо $\frac{k_1}{k_2} = f$. А такъ какъ это уравненіе, вообще говоря, не эквивалентно съ уравненіемъ $f = \frac{k_1}{k_2}$, то приходимъ къ слѣдующему заключенію:

---

*) Въ самомъ дѣлѣ: k_1 и k_2 суть функціи одинаковаго измѣренія относительно линейныхъ элементовъ a, b, c, h_a ... треугольника; слѣдовательно,

$$k_1(ta, tb, tc, th_a \ldots) = t^n k_1$$

$$k_2(ta, tb, tc, th_a \ldots) = t^n k_2,$$

такъ что

$$\varphi[k_1(ta, tb \ldots), k_2(ta, tb \ldots)] = \varphi(t^n k_1, t^n k_2).$$

Если же $\varphi[k_1(a, b \ldots), k_2(a, b \ldots)]$ есть однородная функція нулеваго измѣренія относительно $a, b, c \ldots$, то

$$\varphi[k_1(ta, tb, \ldots), k_2(ta, tb \ldots)] = \varphi(k_1, k_2).$$

Сличая это уравненіе съ предыдущимъ, находимъ, что

$$\varphi(t^n k_1, t^n k_2) = \varphi(k_1, k_2),$$

а это означаетъ, что φ есть однородная функція относительно k_1 и k_2 нулевого измѣренія.

Если вмѣсто дроби $\frac{k_1}{k_2}$ будемъ разсматривать другую однонную дробь нулевого измѣренія относительно линейныхъ элементовъ треугольника, то соотвѣтствующее ей уравненіе не будетъ, вообще говоря, эквивалентно требованіямъ задачи, которыя выражаются уравненіемъ $\frac{k_1}{k_2} = f$. Уравненіе

$$\varphi\left(\frac{k_1}{k_2}\right) = \varphi(f)$$

будетъ эквивалентно требованіямъ задачи только въ томъ случаѣ, когда изъ него съ необходимостью слѣдуетъ

$$f = \frac{k_1}{k_2}\,.$$

Такъ напримѣръ, если $\varphi\left(\frac{k_1}{k_2}\right)$ есть функція раціональная отъ $\frac{k_1}{k_2}$, то изъ уравненія $\varphi\left(\frac{k_1}{k_2}\right) = \varphi(f)$ необходимо слѣдуетъ, что $\frac{k_1}{k_2} = f$ только въ томъ случаѣ, когда $\frac{k_1}{k_2}$ входитъ въ функцію φ въ первой степени, то есть

$$\varphi\left(\frac{k_1}{k_2}\right) = \frac{m_2 + m_1\frac{k_1}{k_2}}{n_2 + n_1\frac{k_1}{k_2}} = \frac{m_1k_1 + m_2k_2}{n_1k_1 + n_2k_2}\,,$$

гдѣ m_1, n_1, m_2, n_2 не зависятъ отъ линейныхъ элементовъ треугольника.

Итакъ, ограничиваясь только раціональными функціями отъ k_1 и k_2, находимъ, что только разсмотрѣніе дробей типа $\frac{m_1k_1 + m_2k_2}{n_1k_1 + n_2k_2}$ приводитъ насъ къ уравненію эквивалентному требованіямъ задачи. Можно поэтому всегда начинать съ уравненія $f = \frac{k_1}{k_2}$ и въ случаѣ надобности замѣнить его уравненіемъ

$$\frac{m_1f + m_2}{n_1f + n_2} = \frac{m_1k_1 + m_2k_2}{n_1k_1 + n_2k_2}\,.$$

Для рѣшенія системы уравненій

$$B + C = 180^0 - A$$

$$f = \frac{k_1}{k_2}$$


исключаютъ одинъ изъ угловъ, напримѣръ C, подстановкой

$C = 180^0 - (A + B)$. Для рѣшенія полученнаго такимъ образомъ уравненія

$$f_1 = \frac{k_1}{k_2},$$

гдѣ f_1 функція одного только угла B, приходится весьма часто замѣнить это уравненіе неэквивалентнымъ съ нимъ уравненіемъ, чѣмъ, вообще говоря, вносятся постороннія рѣшенія. Въ самомъ дѣлѣ, для рѣшенія этого уравненія необходимо выразить всѣ тригонометрическія функціи угла B черезъ одну изъ нихъ, напримѣръ, черезъ sinB. При этомъ получаютъ вообще уравненіе, въ которомъ искомая тригонометрическая функція содержится подъ знаками радикала. Для уничтоженія этихъ радикаловъ часто бываетъ неизбѣжно перейти отъ рѣшаемаго уравненія къ уравненію неэквивалентному съ нимъ. Это означаетъ, что искомыя данной задачи связаны съ искомыми нѣкоторой другой задачи такимъ образомъ, что раціональное уравненіе, корни котораго служатъ отвѣтомъ на данную задачу, будетъ содержать и такіе корни, которые служатъ отвѣтомъ на другую задачу. Иногда, во избѣжаніе указанннаго затрудненія, вводятъ новыя вспомогательныя неизвѣстныя, напримѣръ, вмѣсто sinB ищутъ $\mathrm{tg}\frac{B}{2}$, исключая для этого sinB и cosB при помощи подстановокъ

$$\sin B = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{B}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{B}{2}}, \quad \cos B = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{B}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{B}{2}}.$$

Но и въ томъ случаѣ, когда окончательное уравненіе, изъ котораго опредѣляется тригонометрическая функція угла B или угла C, эквивалентно требованіямъ задачи, степень этого уравненія можетъ оказаться больше числа *различныхъ геометрическихъ* рѣшеній задачи, т. е. числа неравныхъ (или неподобныхъ) между собою треугольниковъ, удовлетворяющихъ требованіямъ задачи. Это, какъ увидимъ, будетъ между прочимъ имѣть мѣсто, когда k_1 и k_2 суть функціи симметричныя относительно b и c, напримѣръ, когда $k_1 = b + c$, $k_2 = r_b + r_c$ или $k_1 = m_a$, $k_2 = l_a + h_b + h_c$ и т. д. Послѣ этихъ общихъ замѣчаній перейдемъ къ разсмотрѣнію отдѣльныхъ случаевъ.

§ 9. **Первый случай.** *Функціи k_1 и k_2 симметричны относительно b и c.*

Пусть AB_mC_m будетъ одинъ изъ треугольниковъ, удовлетворяющихъ требованіямъ задачи;

$$\varphi\left(\frac{k_1}{k_2}, B\right) = 0$$

— окончательное уравненіе, изъ котораго опредѣляется уголъ B,

и предположимъ, что система уравненій

$$B + C = 180^0 - A;\ f = \frac{k_1}{k_2}$$

эквивалентна системѣ

$$B + C = 180^0 - A;\ \varphi\left(\frac{k_1}{k_2},\ B\right) = 0,$$

такъ что постороннихъ рѣшеній не будетъ и ни одно рѣшеніе не потеряно. Послѣднія два уравненія удовлетворяются при $B = B_m$ и $C = C_m$, ибо треугольникъ AB_mC_m удовлетворяетъ требованіямъ задачи. Такъ какъ $\frac{k_1}{k_2}$ есть функція симметричная относительно b и c, то f будетъ функція симметричная относительно B и C, слѣдовательно B и C входятъ симметрично въ *оба* первоначальныя уравненія $B + C = 180^0 - A$, $f = \frac{k_1}{k_2}$, а въ такомъ случаѣ можно получить окончательное уравненіе для опредѣленія угла C точно такимъ же путемъ, какимъ получено было окончательное уравненіе для опредѣленія угла B, такъ что для опредѣленія C будемъ имѣть окончательное уравненіе

$$\varphi\left(\frac{k_1}{k_2},\ C\right) = 0.$$

Отсюда видимъ, что окончательное уравненіе для угла C будетъ то-же, что и для угла B. Уравненія

$$B + C = 180 - A;\ f = \frac{k_1}{k_2},$$

удовлетворяясь при $B = B_m$ и $C = C_m$, будутъ удовлетворяться и при $B = C_m$, $C = B_m$. Но треугольникъ, въ которомъ $B = B_m$, $C = C_m$ подобенъ треугольнику, въ которомъ $B = C_m$, $C = B_m$, слѣдовательно, двумъ различнымъ значеніямъ B_m и C_m угла B соотвѣтствуетъ одно только рѣшеніе задачи. Если n есть число различныхъ рѣшеній задачи, то число различныхъ значеній B будетъ вообще $2n$ и, слѣдовательно, можно ожидать, что и степень окончательнаго уравненія относительно B будетъ равна $2n$. Чтобы понизить степень уравненія, замѣтимъ, что разность $\frac{B - C}{2p}$, гдѣ p постоянное, и въ которой каждому значенію $B = B_m$ соотвѣтствуетъ опредѣленное $C = C_m = 180^0 - (A + B_m)$, будетъ также имѣть вообще $2n$ различныхъ значенія, которыя отличаются другъ отъ друга попарно только знаками, ибо каждому значенію $\frac{B_m - C_m}{2p}$ этой разности отвѣчаетъ другое ея значеніе $\frac{C_m - B_m}{2p}$. А такъ

какъ косинусъ есть функція, не измѣняющаяся съ измѣненіемъ знака дуги, то $\cos\left(\frac{B-C}{2p}\right)$ будетъ имѣть только n различныхъ значеній. Если въ качествѣ вспомогательной неизвѣстной возьмемъ $\cos\left(\frac{B-C}{2p}\right)$, гдѣ p прилично выбранное число, то степень уравненія относительно этой неизвѣстной вообще будетъ равна n.

Легко видѣть, что p выгодно вообще взять равнымъ наименьшему кратному d всѣхъ чиселъ, на которыя дѣлится уголъ B въ уравненіи

$$f=\frac{k_1}{k_2}.$$

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, f будетъ функція раціональная относительно тригонометрическихъ функцій угловъ

$$B, \frac{B}{s_1}, \frac{B}{s_2}, \ldots\ldots,$$

а слѣдовательно и относительно тригонометрическихъ функцій угловъ

$$C, \frac{C}{s_1}, \frac{C}{s_2}, \ldots\ldots,$$

гдѣ всѣ s цѣлыя числа.

Всѣ эти тригонометрическія функціи выразятся раціонально въ синусахъ и косинусахъ угловъ $\frac{B}{d}$ и $\frac{C}{d}$, гдѣ d наименьшее кратное чиселъ s_1, s_2, ... , такъ что f будетъ раціональная функція отъ $\sin\frac{B}{d}$, $\cos\frac{B}{d}$, $\sin\frac{C}{d}$, $\cos\frac{C}{d}$. Положивъ

$$\frac{B-C}{2d}=x,$$

имѣемъ изъ этого равенства и равенства

$$B+C=180^0-A$$

$$B=90^0-\left(\frac{A}{2}-dx\right);\ C=90^0-\left(\frac{A}{2}+dx\right).$$

Внеся эти выраженія для B и C въ уравненіе $f=\frac{k_1}{k_2}$, получимъ послѣ простыхъ преобразованій

$$f(\sin x, \cos x)=\frac{k_1}{k_2},$$

гдѣ f раціональная функція отъ $\sin x$ и $\cos x$. Мы покажемъ, что $\sin x$ входитъ въ f только въ четныхъ степеняхъ.

Дѣйствительно, мы можемъ положить

$$f(\sin x, \cos x) = \frac{M_2 + M_1}{N_2 + N_1}$$

гдѣ M_2 и N_2 суть цѣлыя раціональныя функціи отъ $\sin x$ и $\cos x$, содержащія $\sin x$ только въ четныхъ степеняхъ, а M_1 и N_1 — такія же функціи, содержащія $\sin x$ только въ нечетныхъ степеняхъ. Такъ какъ f есть функція симметричная относительно B и C и перемѣщенію буквъ B и C соотвѣтствуетъ измѣненіе знака x, то $f(\sin x, \cos x)$ есть функція, не измѣняющая своей величины отъ измѣненія x въ $-x$. При такомъ измѣненіи x, фунвція $\cos x$ не измѣняется, а $\sin x$ измѣняетъ знакъ, слѣдовательно функціи M_2 и N_2 не измѣняются, функціи M_1 и N_1 измѣняютъ только знакъ. Такимъ образомъ получимъ

$$f(\sin x, \cos x) = \frac{M_2 + M_1}{N_2 + N_1} = \frac{M_2 - M_1}{N_2 - N_1} = \frac{(M_2 + M_1) + M_2 - M_1}{(N_2 + N_1) + (N_2 - N_1)} = \frac{M_2}{N_2},$$

т. е., если нѣкоторые члены числителя и знаменателя функціи $f(\sin x, \cos x)$ содержатъ $\sin x$ въ нечетныхъ степеняхъ, то такіе члены могутъ быть отброшены безъ измѣненія величины функціи f. Такимъ образомъ мы вправѣ предположить, что въ уравненіи

$$f(\sin x, \cos x) = \frac{k_1}{k_2}$$

$\sin x$ входитъ только въ четныхъ степеняхъ. Замѣняя $\sin^2 x$ черезъ $1-\cos^2 x$, получимъ (безъ повышенія степени уравненія) окончательное уравненіе

$$f(\cos x) = \frac{k_1}{k_2},$$

степень котораго будетъ равна числу различныхъ рѣшеній задачи.

Примѣчаніе. Каждая изъ функцій $\cos B \cos C$, $\sin B \sin C$, $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ не измѣняетъ своей величины отъ перемѣщенія буквъ B и C, поэтому каждое изъ этихъ произведеній имѣетъ только n различныхъ значеній, если задачи имѣютъ n различныхъ значеній. Отсюда слѣдуетъ, что мы получимъ уравненіе степени n, а не $2n$, если вмѣсто двухъ неизвѣстныхъ A и B введемъ двѣ неизвѣстныя

$\cos B \cos C = x$; $\sin B \sin C = y$ или $\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = x$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = y$ и т. д.

Примѣры.

1. Даны: A, p, Δ. Требуется найти B и C. Задача рѣшена въ § 4, примѣръ 2. Вспомогательная неизвѣстная есть $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

2. Даны A, a, l_a. Требуется найти B и C.

Рѣшеніе:

$$\frac{l_a}{a}=\frac{h_a}{a\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{b\sin C}{a\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{\sin B\sin C}{\sin A\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Полагая

$$\frac{B-C}{2}=x$$

и принимая во вниманіе, что

$$B+C=180^0-A,$$

находимъ

$$B=90^0-\left(\frac{A}{2}-x\right);\quad C=90^0-\left(\frac{A}{2}+x\right),$$

поэтому

$$\frac{l_a}{a}=\frac{\cos\left(\frac{A}{2}-x\right)\cos\left(\frac{A}{2}+x\right)}{\sin A\cos x}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2 x-\sin^2\frac{A}{2}\sin^2 x}{\sin A\cos x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2\frac{A}{2}}{\sin A\cos x}.$$

Такимъ образомъ имѣемъ квадратное уравненіе для опредѣленія $\cos x=\cos\frac{B-C}{2}$.

3. Даны: уголъ A, сумма медіанъ m_b+m_c и сумма $h_b'+h_c'$ разстояній ортоцентра отъ сторонъ b и c. Найти B и C.

Такъ какъ сумма m_b+m_c, будучи выражена въ сторонахъ треугольника содержитъ два радикала (§ 3), а изъ двухъ выраженій $4m_b^2+4m_c^2$ и m_bm_c первое не будетъ содержать радикаловъ, а второе содержитъ только одинъ, то вмѣсто отношенія $(m_b+m_c):(h_b'+h_c')$ разсмотримъ учетверенный квадратъ этого отношенія:

$$\frac{4(m_b+m_c)^2}{(h_b'+h_c')^2}=\frac{4m_b^2+4m_c^2}{(h_b'+h_c')^2}+\frac{8m_bm_c}{(h_b'+h_c')^2}=\frac{4a^2+b^2+c^2}{(h_b'+h_c')^2}+$$

$$+\frac{8\sqrt{4a^4+2a^2(b^2+c^2)-2(b^4+c^4)+5b^2c^2}}{(h_b'+h_c')^2}. \qquad (1)$$

Отсюда, сообразуясь съ равенствами § 3, усматриваемъ, что, по замѣнѣ b и c черезъ $\sin B$ и $\sin C$, намъ придется разсматри-

вать рядъ выраженій, которыя всѣ суть раціональныя функціи отъ $\cos(B-C)=\cos x$, а именно

$$(\cos B+\cos C)^2=4\cos^2\frac{B+C}{2}\cos^2\frac{B-C}{2}=[1+\cos(B+C)]\,[1+\cos(B-C)]=$$

$$=(1-\cos A)(1+\cos x)$$

$$(\sin B+\sin C)^2=(1+\cos A)(1+\cos x);$$

$$\sin B\sin C=\frac{1}{2}\cos(B-C)-\frac{1}{2}\cos(B+C)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos A.$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на 2 и вычтя изъ предыдущаго, найдемъ

$$\sin^2B+\sin^2C=1+\cos A\cos x.$$

Далѣе,

$$\sin^2B\sin^2C=\frac{1}{4}\cos^2x+\frac{1}{2}\cos A\cos x+\frac{1}{4}\cos^2A\,,$$

$$\sin^4B+\sin^4C=(\sin^2B+\sin^2C)^2-2\sin^2B\sin^2C=\left(\cos^2A-\frac{1}{2}\right)\cos^2x+$$

$$+\cos A\cos x+1-\frac{1}{2}\cos^2A.$$

Пользуясь этими равенствами и замѣнивъ въ равенствѣ (1) a, b, c черезъ $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, получимъ

$$\frac{4(m_b+m_c)^2}{(h_b'+h_c')}-\frac{\mu+\nu\cos x}{\mu_1+\nu_1\cos x}=\frac{\sqrt{\pi\cos^2x+\sigma\cos x+\tau}}{\mu_1\cos x+\nu_1},$$

гдѣ μ, ν, μ_1, ν_1, π, σ, τ извѣстныя функціи отъ A. Возвышая обѣ части этого уравненія въ квадратъ, найдемъ квадратное уравненіе для опредѣленія $\cos x$. Задачѣ будутъ соотвѣтствовать только тѣ значенія $\cos x$, которыя обращаютъ лѣвую часть послѣдняго уравненія въ положительное число.

4 и 5. Подобнымъ же образомъ убѣждаемся, что рѣшеніе треугольника по даннымъ A, h_a+h_b и l_a приводится къ рѣшенію уравненія 1-й степени относительно $\cos(B-C)$ и что рѣшеніе треугольника по даннымъ A, h_b+h_c и $h_b'+h_c'$ вообще невозможно, такъ какъ $(h_b+h_c):(h_b'+h_c')=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}A$, т. е. уголъ A опредѣляется отношеніемъ данныхъ h_b+h_c и $h'_b+h'_c$ и не можетъ быть задаваемъ.

(Окончаніе слѣдуетъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новая лампочка накаливанія. Между многочисленными, премированными на Парижской выставкѣ, изобрѣтеніями, обращаетъ на себя вниманіе новая лампочка накаливанія Nernst'a, профессора физической химіи Геттингенскаго университета. Приводимъ здѣсь вкратцѣ содержаніе доклада объ этомъ изобрѣтеніи, прочитаннаго Нернстомъ въ прошломъ году въ Берлинѣ.—Какъ извѣстно, бо́льшая часть лучей, испускаемыхъ угольной нитью нынѣ употребляемой лампочки накаливанія, приходится на долю лучей, превосходящихъ по длинѣ волны свѣтовые лучи. Только 3% всей энергіи испускаемой такой лампочкой даютъ свѣтъ, 97% же безполезно пропадаютъ. Теоретически можно было бы достигнуть лучшихъ результатовъ; для этого достаточно нагрѣть лампочку. Но на практикѣ это невыполнимо, такъ какъ ни угольныя ни обыкновенныя металлическія нити не переносятъ высокихъ температуръ. Поэтому проф. Нернстъ сталъ искать матеріалъ, испускающій достаточное количество свѣта и нагрѣвающійся токомъ до достаточно высокой температуры. Этимъ требованіямъ, какъ оказывается, удовлетворяетъ окись магнія (Magnesumoxyd). Это вещество оставаясь холоднымъ не электропроводно; но стоитъ нагрѣть палочку, приготовленную изъ него, до краснаго каленія, и она начинаетъ проводить токъ, который въ свою очередь нагрѣваетъ ее до совершенно бѣлаго каленія. Въ такомъ состояніи палочка испускаетъ ослѣпительно бѣлый, равномѣрный свѣтъ. Напряженность входящихъ въ этотъ свѣтъ лучей приблизительно одинакова для волны всякой длины, такъ что свѣтъ этотъ приближается къ солнечному. Для практики такая лампочка была непримѣнима, пока не удалось изобрѣсти приспособленія для первоначальнаго нагрѣванія палочки. Мы приводимъ здѣсь описаніе одного изъ такихъ приспособленій, изобрѣтеннаго самимъ проф. Нернстомъ, какъ наиболѣе остроумное. Вотъ принципъ его: тѣло накаливанія, т. е. палочка магнія, помѣщается въ фокусѣ цилиндро-параболическаго колокола, на внутренней сторонѣ котораго проходятъ обороты тонкой платиновой проволоки. Сперва токъ, который не въ состояніи пройти черезъ палочку, потечетъ по этой проволокѣ и нагрѣетъ ее. Испускаемыя ею лучи собираются въ фокусѣ и нагрѣваютъ палочку. Тогда токъ устремляется черезъ нее и она начинаетъ свѣтиться. Въ то же время этотъ сильный токъ проходитъ по помѣщенному тутъ же въ цѣпи соленоиду; послѣдній втягиваетъ тогда свой сердечникъ, къ которому прикрѣпленъ вышеупомянутый колоколъ съ платиновой проволокой. Такимъ образомъ проволока выводится изъ цѣпи и колоколъ не мѣшаетъ свѣту палочки распространяться во всѣ стороны.—Лампѣ Нернста несомнѣнно принадлежитъ будущее не менѣе блестящее, чѣмъ, напр., Ауэровскимъ горѣлкамъ. Нѣтъ необходимости помѣщать тѣло накаливанія въ разрѣженный воздухъ и кромѣ того получается при употребленіи этой лампы громадная экономія электрической энергіи.

Экспедиція герцога Абруццкаго. Какъ сообщаетъ „Globus“ экспедиція герцога Абруццкаго вернулась 5-го сентября въ Норвегію. Зимовка происходила на землѣ Франца-Іосифа, подъ 81°55′ сѣв. шир.; холодъ достигъ здѣсь --52°С. Въ мартѣ были отправлены на собакахъ 3 экспедиціи на сѣверъ, изъ которыхъ одна погибла; другая достигла 83°, а третья, подъ предводительствомъ капитана *Cagni достигла 86°33′*. Это самая сѣверная донынѣ достигнутая точка, такъ какъ Нансенъ достигъ 86°14′.

Телефонированіе безъ проводовъ. Сэръ W. H. Preece сообщилъ недавно секціи А. Британской Ассоціаціи въ Bradford'ѣ объ удачномъ телефонированіи безъ проводовъ на разстояніи 6—13 километровъ. Телефонированіе производилось надъ поверхностью моря, съ одного берега на другой между островомъ Рэтлинъ и сѣв. берегомъ Ирландіи. Первые опыты телефонированія безъ проводовъ были произведены въ 1894 г. въ Шотландіи. (Elektrotechnische Zeitschrift).

Опыты телеграфированія безъ проводовъ. Въ Гарцѣ (Германія) съ вершины Брокенъ производились нѣсколько дней тому назадъ съ военною цѣлью опыты телеграфированія безъ проводовъ, которые удались вполнѣ. Сначала телеграфировали до Victoriashöhe (на разстояніи 25 километровъ), а затѣмъ до Kyffhäser'а (за 60 километровъ).

Д. Шоръ (Геттингенъ).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

28-го сентября с. г. при Бреславльскомъ университетѣ открытъ *физическій институтъ*.

Отъ 8—11 августа въ Гейдельбергѣ засѣдалъ *18-ый съѣздъ нѣмецкаго Астрономическаго Общества*. Слѣдующій съѣздъ будетъ происходить въ Геттингенѣ.

Королевское Общество (Royal Society) основало, по завѣщанію покойнаго физика *проф. Hughes'а, интернаціональную премію*. Ежегодно будетъ чеканиться *медаль* съ портретомъ покойнаго; эта медаль будетъ выдаваться лицамъ, представившимъ самостоятельную работу по электричеству, магнитизму или по ихъ приложеніямъ, безъ различія пола и національности.

13-го іюля происходило въ Берлинѣ освященіе *перваго химическаго института* университета. Новое зданіе стоитъ 1.650.000 марокъ (около 800.000 рублей) и занимаетъ 10.000 кв. метровъ пространства. Научный персоналъ состоитъ въ настоящее время изъ 15 человѣкъ (3 профессора и 12 ассистентовъ). (Hochschul-Nachrichten).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 625. Даны прямыя AB, AC и AD. Черезъ данную точку K провести окружность, встрѣчающую данныя прямыя въ трехъ точкахъ, образующихъ треугольникъ, подобный данному.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 626. Если A', B', C' суть соотвѣтственно точки касанія сторонъ BC, CA и AB треугольника ABC съ внѣвписанными окружностями, имѣющими центры въ I_a, I_b, I_c, то прямыя $A'I_a$, $B'I_b$, $C'I_c$, пересѣкаются въ центрѣ окружности $I_a I_b I_c$.

(Заимств.) *Д. Е.*

№ 627. Показать, что

$$abc\, r_a r_b r_c h_a h_b h_c \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=8p^3S^3,$$

гдѣ a, b, c — стороны, — r_a, r_b, r_c радіусы внѣвписанныхъ круговъ, — h_a, h_b, h_c высоты, A, B, C углы и S площадь треугольника.

Я. Полушкинъ (Знаменка).

№ 628. Рѣшить систему уравненій:

$$x^2-y^2=z^2$$

$$(x+y+z)(x-y+z)(y+z-x)(y+x-z)=576$$

$$y-z=1.$$

В. Шлыгинъ (Ст. Урюпинская).

№ 629. Рѣшить уравненіе:

$$(x^2-2)^5+x^5=5x^2(x-1)(x+2)(x^2-2)^2.$$

(Заимств.) *Е. Е.*

№ 630. 50 элементовъ Даніеля съ электродвижущей силой въ 1 вольтъ и сопротивленіемъ въ 1 омъ соединены послѣдовательно. Сколько лампъ накаливанія, соединенныхъ параллельно, можетъ питать такая батарея, если извѣстно, что эти лампы требуютъ электровозбудительной силы въ 50 вольтъ и силы тока въ 0,5 ампера, а сопротивленіе въ накаленномъ состояніи равно 50 омамъ?

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 512 (3 сер.). *Произвольная точка* M *окружности радіуса* r, *вписанной въ квадратъ* ABCD, *соединена съ его вершинами. Доказать, что:*

$$tg^2 AMC + tg^2 BMD = 8,$$

$$\overline{AM}^4 + \overline{BM}^4 + \overline{CM}^4 + \overline{DM}^4 = 52r^4.$$

Пусть O центръ вписанной въ квадратъ окружности, и пусть стороны квадрата AB, BC, CD, DA касаются окружности O соотвѣтственно въ точкахъ E, F, G, H. Введемъ обозначенія: $AM = x$, $BM = y$, $CM = z$, $DM = u$; $\angle MFH = \alpha$, $\angle AMC = \beta$, $\angle BMD = \gamma$. Тогда (пусть точка M лежитъ внутри угла EOH).

$$\left.\begin{aligned} MG &= 2r\sin\frac{1}{2}\left(\angle GOH + \angle MOH\right) = 2r\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = 2r\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \\ ME &= 2r\sin\frac{1}{2}\left(\angle EOH - \angle MOH\right) = 2r\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \\ MH &= 2r\sin\alpha;\ AO = OB = r\sqrt{2},\ AC = 2r\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Изъ треугольниковъ AMC, AMD и DMC имѣемъ (см. (1)):

$$x^2 + z^2 = 2\,\overline{AO}^2 + 2\,\overline{MO}^2 = 6r^2 \quad (2)$$

$$z^2 + u^2 = 2\,\overline{DG}^2 + 2\,\overline{MG}^2 = 2r^2 + 8r^2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \quad (3)$$

$$x^2 + u^2 = 2\,\overline{MH}^2 + 2\,\overline{AH}^2 = 2r^2 + 8r^2\sin^2\alpha. \quad (4)$$

Вычитая изъ равенства (3) равенство (4) получимъ:

$$z^2 - x^2 = 8r^2\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\alpha\right] = 8r^2\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{8r^2}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) \quad (5).$$

Сложивъ равенства (2) и (5) послѣ возвышенія обѣихъ частей каждаго изъ нихъ въ квадратъ и сокративъ полученное равенство на 2, имѣемъ:

$$x^4 + z^4 = r^4\left[18 + 16\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)\right] \quad (6).$$

Точно также изъ треугольниковъ DMB и BMA находимъ:

$$y^2 + u^2 = 6r^2 \quad (7)$$

$$y^2 + x^2 = 2r^2 + 8r^2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right).$$

Присоединяя къ этимъ равенствамъ равенство (4), мы послѣ преобразованій, аналогичныхъ вышеприведеннымъ найдемъ:

$$y^4+u^4=r^4\left[18+16\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\right]=r^4\left[18+16\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\right] \quad (8).$$

Сложивъ почленно равенства (6) и (8), имѣемъ:

$$x^4+y^4+z^4+u^4=\overline{AM}^4+\overline{BM}^4+\overline{CM}^4+\overline{DM}^4=52r^4.$$

Треугольники AMC и BMD даютъ:

$$\cos\angle AMC=\cos\beta=\frac{x^2+z^2-\overline{AC}^2}{2xz},$$

или (см. (1), (2)):

$$\cos\beta=\frac{6r^2-8r^2}{2xz}=\frac{-r^2}{xz} \quad (9)$$

Точно также найдемъ:

$$\cos\angle BMD=\cos\gamma=\frac{r^2}{yu} \quad (10).$$

Изъ равенствъ (8) и (9) слѣдуетъ:

$$\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma=\frac{x^2z^2-r^4}{r^4}+\frac{y^2u^2-r^4}{r^4}=\frac{x^2z^2+y^2u^2-2r^4}{r^4} \quad (11).$$

Возвысивъ обѣ части равенства (2) въ квадратъ, вычтя изъ полученнаго равенства почленно равенство (6) и сокративъ найденное равенство на 2, имѣемъ:

$$x^2z^2=9r^4-8r^4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right) \quad (12).$$

Аналогичнымъ путемъ изъ равенствъ (7) и (8) можно найти, что

$$y^2u^2=9r^4-8r^2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\quad 2\alpha\right)=9r^4-8\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right) \quad (13).$$

Сложивъ почленно равенства (12) и (13) и подставивъ найденное значеніе суммы $x^2z^2+y^2u^2$ въ равенство (11), получимъ:

$$\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma=\operatorname{tg}^2AMC+\operatorname{tg}^2BMD=8.$$

Кязымбекъ Годжаманбековъ (Баку).

№ 568 (3 сер.). *Рѣшить уравненіе:*

$$\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^3-3\sqrt{3}}=2\sqrt{x-\sqrt{3}}\sqrt[4]{x^3+2x^2\sqrt{3}+6x+3\sqrt{3}}.$$

Перенеся всѣ члены уравненія въ первую часть и замѣчая,

что

$$\sqrt{x^2-3}=\sqrt{x-\sqrt{3}}\,.\,\sqrt{x+\sqrt{3}},\sqrt{x^3-3\sqrt{3}}=\sqrt{x-\sqrt{3}}\,.\,\sqrt{x^2+x\sqrt{3}+3},$$

приводимъ его къ виду:

$$\sqrt{x-\sqrt{3}}\left(\sqrt{x+\sqrt{3}}+\sqrt{x^2+x\sqrt{3}+3}-2\sqrt[4]{x^3+2x^2\sqrt{3}+6x+3\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\sqrt{x-\sqrt{3}}\left[\sqrt[4]{x+\sqrt{3}}-\sqrt[4]{x^2+x\sqrt{3}+3}\right]^2,$$

откуда или

$$\sqrt{x-\sqrt{3}}=0,\ x=\sqrt{3},$$

или

$$\sqrt[4]{x+\sqrt{3}}=\sqrt[4]{x^2+x\sqrt{3}+3},$$

а потому

$$x+\sqrt{3}=x^2+x\sqrt{3}+3.$$

Рѣшая это квадратное уравненіе, находимъ:

$$x=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\pm\sqrt{2\sqrt{3}-8}\right).$$

М. Николаевъ (Севастополь); *К. Шварцбергъ* (Севастополь); *С. М. Р.* (Житомиръ); *П. Полушкинъ* (Знаменка); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *Я. Тепляковъ* (Кіевъ).

ПОПРАВКИ.

Въ № 283 „Вѣстника" на стр. 148 во 2-ой строкѣ снизу вмѣсто слова „хлористый" слѣдуетъ читать „сѣрнистый".

Въ Зад. № 509 (въ № 264 „Вѣстника".):

Вмѣсто

$$x^4+ax^3+\frac{a}{2}\left(b-\frac{a^2}{4}\right)a+c=0$$

надо читать:

$$x^4+ax^3+\frac{a}{2}\left(b-\frac{a^2}{4}\right)x+c=0.$$

Въ Зад. № 524 (№ 267 „Вѣстника").

Вмѣсто

$$ax^5+dx^4+cx^3+ckx^2+bk^3x+ak^5=0$$

надо читать:

$$ax^5+bx^4+cx^3+ckx^2+bk^3x+ak^5=0.$$

Въ Зад. № 526 (№ 267 „Вѣстника").

Вмѣсто

$$2ad\cos\Theta=b^2+c^2-e^2-f^2$$

надо читать:

$$2ad\cos\Theta=b^2-c^2+e^2-f^2.$$

Редакторъ **В. А. Циммерманъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено цензурою, Одесса, 26-го Октября 1900 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.